Tendances dans les Applications Mathématiques
en Tunisie Algérie Maroc
Tlemcen, 23-27 Février 2019

Sur les modèles espace d'états périodiques à changement de régimes markovien

Billel ALIAT[1,2] **Fayçal HAMDI**[2]

[1]Centre de Recherche en Economie Appliquée pour le Développement (CREAD)
[2]Laboratoire RECITS, Faculté des mathématiques, USTHB

aliatbillel@yahoo.fr fhamdi@usthb.dz

Résumé : Ce travail est dévoué à l'étude des modèles espace d'états périodiques à changement de régimes Markovien. Notre but est d'établir un filtre adapté à ce nouveau modèle proposé, en s'appuyant sur les travaux de Kim (1994), Hamilton (1994) , Kim et Nelson (1999) et Nagy et Suzdaleva (2013) , et enfin, de proposer un algorithme permettant d'évaluer la fonction de vraisemblance du modèle et par la suite estimer ses paramètres inconnus.

Mots-Clefs : Modèle espace d'états, processus périodiquement corrélés, changement de régimes markovien

1 Introduction

Au cours des dernières décennies, il y a eu un intérêt croissant pour l'application des modèles espace d'états dans l'analyse des séries temporelles (cf. Harvey, 1989; West et Harrison, 1997; Kim et Nelson, 1999; Durbin et Koopman, 2001; Douc, Moulines et Stoffer, 2014). Ils peuvent être utilisés afin de réduire la complexité des problèmes liés à l'analyse de certains modèles des séries chronologiques. En effet, ils peuvent en particulier, être exploités dans le problème de l'estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance (e.g. Harvey, 1989; Stoffer et Wall,1991), dans l'estimation des données manquantes (e.g. Stoffer et Wall,1991), dans l'estimation des erreurs de prédiction conditionnelles et dans la détermination des régions de prévision pour les observations futures de la série (e.g. Wall et Stoffer, 2002; Rodriguez et Ruiz, 2009). En outre, ils ont une structure probabiliste puissante, offrant un outil flexible pour un champ d'application très vaste. Ces modèles peuvent être utilisés, non seulement, pour modéliser des séries temporelles univariées ou multivariées, mais aussi, en présence de non stationnarité, de changements structurels ou de périodicité. En effet, les modèles espace d'états ont été largement utilisés pour décrire de nombreuses séries présentant différentes dynamiques, rencontrées dans divers domaines, tels que l'économie (cf. Harvey et Todd, 1983; Kitagawa et Gersch, 1984, Shumway et Stoffer, 1982), la médecine (Jones, 1984) et dans d'autres domaines.

Par ailleurs, les modèles espace d'états et les modèles à changement de régimes Markovien ne sont pas nouveaux dans les littératures statistiques et économétriques. Cependant, le nombre croissant d'articles publiés qui les employaient démontre leur utilité et leur large applicabilité. La combinaison des modèles espace d'états avec les chaînes de Markov, pour faire l'inférence statistique sur l'instant et la nature des changements de régime, n'est pas trivial. Cela devient clair quand nous pensons que le nombre de régimes ainsi que les instants des changements de régimes sont inconnus, et donc, l'estimation de ces modèles nécessite la connaissance de toute la trajectoire des régimes. Bien que les modèles qui intègrent à la fois les variables d'état et le changement de régime aient de nombreuses applications potentielles évidentes, leur estimation a posé de sérieux obstacles calculatoires. Cependant, face à ces difficultés, Kim (1994) a développé un algorithme pour faire l'inférence sur la variable d'état inobservable et évaluer la fonction de vraisemblance afin d'estimer les paramètres d'un modèle espace d'états à changement de régimes. Récemment, Nagy and Suzdaleva (2013) ont proposé un autre algorithme pour estimer la variable d'état.

Ce travail, est consacré à l'étude des modèles espace d'états à coefficients périodiques dans le temps et à changement de régimes markovien. Nous allons, donc, présenter la définition de ces modèles. Par la suite, nous dérivons un filtre adéquat permettant d'estimer le vecteur d'état inobservable, en se basant sur les travaux de Hamilton (1994) , Kim et Nelson (1999) Chen et Tsay (2011) et Nagy et Suzdaleva (2013). Enfin, ce travail sera conclu par un algorithme qui permet d'évaluer la fonction de vraisemblance du modèle afin d'estimer les paramètres inconnus.

2 Définitions et notations

Le modèle espace d'état à coefficients périodiques et à changement de régimes markovien, que nous proposons, est défini par les équations suivantes

$$\begin{aligned} y_t &= C_t(\Delta_t)\,x_t + H_t(\Delta_t)\,z_t + u_t, && (1)\\ x_t &= A_t(\Delta_t)\,x_{t-1} + v_t, && (2) \end{aligned}$$

$$\binom{u_t}{v_t} \sim \mathcal{N}\left(0 \quad , \begin{pmatrix} R_t(\Delta_t) & 0 \\ 0 & Q_t(\Delta_t) \end{pmatrix}\right), \qquad (3)$$

où l'équation d'observation (1) décrit la relation entre un vecteur de dimension $N \times 1$ de données observées y_t et un vecteur de dimension $M \times 1$ de variables inobservables x_t et un vecteur de dimension $K \times 1$ de variables exogènes. L'équation de transition (2) décrit l'évolution du vecteur d'état inobservable x_t. Les matrices aléatoires $C_t(\Delta_t)$, $H_t(\Delta_t)$, $A_t(\Delta_t)$, $R_t(\Delta_t)$ et $Q_t(\Delta_t)$ sont de dimensions $N \times M$, $N \times K$, $M \times M$, $N \times N$ et $M \times M$ respectivement. Ces matrices sont des fonctions périodiques dans le temps de période S (i.e., $C_{t+\tau S}(k) = C_t(k)$, $H_{t+\tau S}(k) = H_t(k)$, $A_{t+\tau S}(k) = A_t(k)$, $R_{t+\tau S}(k) = R_t(k)$ et $Q_{t+\tau S}(k) = Q_t(k)$, pour $\Delta_t = k$ avec $k = 1, \ldots, d$ et pour tout $t, \tau \in \mathbb{Z}$) et dépendent d'une chaîne de Markov (Δ_t).

3 Filtre associé au modèle

Supposons que les paramètres du modèle spécifié par les équations (1) et (2) sont connus. Soit $\mathcal{F}_t$ l'ensemble de toutes les observations disponibles jusqu'à l'instant t, tel que, $\mathcal{F}_t = (y_1', \ldots, y_t', z_1', \ldots, z_t')'$.

Dans les modèles espace d'états linéaires et à coefficients constants, le but est d'établir la meilleure prédiction du vecteur d'état inobservable x_t basée sur l'information disponible $\mathcal{F}_{t-1}$. Il s'agit donc, de calculer la loi conditionnelle du vecteur d'état x_t sachant $\mathcal{F}_{t-1}$. Pour cela, il suffit de calculer la moyenne, notée $x_{t|t-1}$, et la matrice de variance-covariance de l'erreur de prédiction, notée $P_{t|t-1}$, de cette loi conditionnelle, i.e.,

$$x_{t|t-1} = \mathbb{E}\left(x_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

et

$$P_{t|t-1} = \mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{t|t-1}\right)\left(x_t - x_{t|t-1}\right)' \mid \mathcal{F}_{t-1}\right].$$

Une fois la loi conditionnelle du vecteur d'état prédit est connue, nous utilisons les équation du filtre de Kalman pour calculer la loi conditionnelle du vecteur d'état filtré, en calculant la moyenne de x_t sachant $\mathcal{F}_t$, notée $x_{t|t}$, ainsi que la matrice de variance-covariance de l'erreur de filtrage, notée $P_{t|t}$.

Dans notre cas, la nature récursive de l'équation (2), requiert la connaissance de toute la trajectoire des régimes. Puisque les régimes sont inobservables, on doit connaitre toutes les trajectoires possibles des régimes lors de la prédiction du vecteur d'état x_t à partir de l'information disponible à l'instant $t-1$, selon le critère de l'erreur moyenne quadratique. Cependant, le nombre de trajectoires possibles augmente de façon exponentielle à travers le temps, ce qui rend cette tâche irréalisable. Afin de contourner cette difficulté, nous proposons de se restreindre à la connaissance d'un passé limité de la trajectoire au lieu de la connaissance de toute la trajectoire, de telle sorte que nous obtenons une bonne prédiction et en contrepartie nous aurons une complexité raisonnable de l'algorithme. Nous adoptons la même idée de Aliat et Hamdi (2018), nous définissons une nouvelle variable Δ_t^* qui énumère toutes les trajectoires possibles de la chaîne de Markov jusqu'à un certain retard $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$$\begin{array}{lll}
\Delta_t^* = 1 & \text{si} & \Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\Delta_t^* = 2 & \text{si} & \Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\quad\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\
\Delta_t^* = d & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = 1, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\Delta_t^* = d+1 & \text{si} & \Delta_t = 1, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\Delta_t^* = d+2 & \text{si} & \Delta_t = 2, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\quad\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\
\Delta_t^* = 2d & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = 2, \ldots, \Delta_{t-r} = 1, \\
\quad\vdots & \vdots & \qquad\qquad\vdots \\
\Delta_t^* = d^{r+1} & \text{si} & \Delta_t = d, \Delta_{t-1} = d, \ldots, \Delta_{t-r} = d,
\end{array}$$

à partir de laquelle nous pouvons caractériser la $j^{ème}$ trajectoire $\Delta_t^* = j$, de la même manière que dans la Section 2.6. Il est clair que (Δ_t^*) est une chaîne de Markov définie sur un espace d'état fini $\mathcal{E}^* = \left\{1, 2, \ldots, d^{r+1}\right\}$, et de matrice de transition $\mathbb{P}^*$ dont les probabilités de transitions $p^*(i,j) = P\left(\Delta_t^* = j \mid \Delta_{t-1}^* = i\right)$, pour $i, j \in \mathcal{E}^*$, peuvent être calculées explicitement de la manière suivante

$$p^*(i,j) = P\left(\Delta_t = j_0, \Delta_{t-1} = j_1, \ldots, \Delta_{t-r} = j_r \middle| \Delta_{t-1} = i_1, \Delta_{t-2} = i_2, \ldots, \Delta_{t-r} = i_r, \Delta_{t-r-1} = i_{r+1}\right),$$

ce qui donne

$$p^*(i,j) = \begin{cases} p(i_1, j_0) & \text{si } j_1 = i_1,\ j_2 = i_2, \ldots,\ j_r = i_r, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad , \tag{4}$$

où $p(i,j)$, $i, j \in \mathcal{E}$, sont les probabilités de transition de la chaîne de Markov (Δ_t).

Dans le cas du modèle espace d'état périodique à changement de régimes Markovien, notre but est de former une prédiction pour le vecteur d'état inobservable x_t basée non seulement sur l'information disponible $\mathcal{F}_{t-1}$, mais aussi sur l'état de la chaîne de Markov (Δ_t^*). Nous avons

$$x_{\Delta_t^*;t|t-1} = \mathbb{E}\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) = A_t\left(\Delta_t^*\right) x_{\Delta_{t-1}^*;t-1|t-1}, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} P_{\Delta_t^*;t|t-1} &= \mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)' \middle| \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= A_t\left(\Delta_t^*\right) P_{\Delta_{t-1}^*;t-1|t-1} A_t'\left(\Delta_t^*\right) + Q_t\left(\Delta_t^*\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\epsilon_{\Delta_t^*;t|t-1} = y_t - \mathbb{E}\left[y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right] = y_t - C_t\left(\Delta_t^*\right) x_{\Delta_t^*;t|t-1} - H_t\left(\Delta_t^*\right) z_t, \tag{7}$$

et

$$\Omega_{\Delta_t^*;t|t-1} = \mathbb{E}\left(\epsilon_{\Delta_t^*;t|t-1}\epsilon_{\Delta_t^*;t|t-1}' \middle| \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) = C_t\left(\Delta_t^*\right) P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'\left(\Delta_t^*\right) + R_t\left(\Delta_t^*\right). \tag{8}$$

La distribution du vecteur $(y_t', x_t')'$ conditionnellement à Δ_t^* et $\mathcal{F}_{t-1}$, est une distribution gaussienne donnée par

$$\begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix}_{|\Delta_t^*,\mathcal{F}_{t-1}} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} C_t(\Delta_t^*)\, x_{\Delta_t^*;t|t-1} + H_t(\Delta_t^*)\, z_t \\ x_{\Delta_t^*;t|t-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_{\Delta_t^*;t|t-1} & C_t(\Delta_t^*)\, P_{\Delta_t^*;t|t-1} \\ P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'(\Delta_t^*) & P_{\Delta_t^*;t|t-1} \end{pmatrix}\right).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$x_{\Delta_t^*;t|t} = x_{\Delta_t^*;t|t-1} + P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'(\Delta_t^*)\, \Omega^{-1}_{\Delta_t^*;t|t-1}\left(y_t - C_t(\Delta_t^*)\, x_{\Delta_t^*;t|t-1} - H_t(\Delta_t^*)\, z_t\right) \tag{9}$$

et

$$P_{\Delta_t^*;t|t} = P_{\Delta_t^*;t|t-1} - P_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t'(\Delta_t^*)\, \Omega^{-1}_{\Delta_t^*;t|t-1} C_t(\Delta_t^*)\, P_{\Delta_t^*;t|t-1} \tag{10}$$

Notons, cependant, que $x_{\Delta_t^*;t|t}$ and $P_{\Delta_t^*;t|t}$ ne représentent pas exactement $\mathbb{E}(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t)$ et

$$\mathbb{E}\left[\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)\left(x_t - x_{\Delta_t^*;t|t-1}\right)' \middle| \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right],$$

ceci est dû au fait que la loi conditionnelle de x_t sachant Δ_t^* and $\mathcal{F}_t$ est un mélange de lois normales. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire quelques approximations pour rendre le filtre de Kalman donné par les équations (5) et (6) opérationnel.

4 Estimation du modèle

Pour dériver un algorithme qui permet d'estimer les paramètres inconnus du modèle, nous devons établir quelques approximations afin de garantir la récursivité des équations du filtre de Kalman.

4.1 Construction et approximation de la densité à postériori du vecteur d'état

La densité à postériori du vecteur d'état x_t peut être obtenue par sommation des densités conditionnelles sachant toutes les trajectoires possibles des régimes, i.e.,

$$\begin{aligned} f(x_t \mid \mathcal{F}_t) &= \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(x_t, \Delta_t^* \mid \mathcal{F}_t) = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(x_t, \Delta_t^* \mid y_t, \mathcal{F}_{t-1}) \\ &\propto \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(x_t, y_t, \Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t)\, f(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1})\, P(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}). \end{aligned} \tag{11}$$

D'après (11), nous constatons que $f(x_t \mid \mathcal{F}_t)$ est un mélange de lois gaussiennes. Notre but est d'approximer ce mélange par une seule loi gaussienne, que nous notons $\widehat{f}(x_t \mid \mathcal{F}_t)$, telle que la mesure de divergence entre les deux densités, dite *Kerridge inaccuracy*, définie par

$$K\left(f(x_t \mid \mathcal{F}_t); \widehat{f}(x_t \mid \mathcal{F}_t)\right) = \int_\chi f(x_t \mid \mathcal{F}_t) \ln \frac{1}{\widehat{f}(x_t \mid \mathcal{F}_t)} dx_t,$$

atteint son minimum, où χ est l'ensemble de toutes les valeurs possible de x_t, $\forall t \in \mathbb{Z}$. Soit

$$f(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t) \equiv \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) \text{ et } \widehat{f}(x_t \mid \mathcal{F}_t) \equiv \mathcal{N}\left(\widehat{x}_{t|t}, \widehat{P}_{t|t}\right).$$

Tout d'abord, calculons la mesure K entre la distribution conditionnelle $f\left(x_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_t\right)$ et la distribution approximée $\widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$, du vecteur d'état x_t, notée $K_{\Delta_t^*}$, et qui prend la forme suivante

$$K_{\Delta_t^*} = \int_{\mathcal{X}} \mathcal{N}\left(x_{\Delta_t^*;t|t}, P_{\Delta_t^*;t|t}\right) \ln \frac{1}{\mathcal{N}\left(\widehat{x}_{t|t}, \widehat{P}_{t|t}\right)} dx_t,$$

D'où

$$K_{\Delta_t^*} = -\ln\left(2\pi\right)^{-\frac{M}{2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\widehat{P}_{t|t}\right| + \frac{1}{2}\left[Tr\left(\widehat{P}_{t|t}^{-1} P_{\Delta_t^*;t|t}\right) + \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\right].$$

Par conséquent, la mesure K sera exprimée comme suit

$$K = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) K_{\Delta_t^*}.$$

Pour minimiser la mesure K, il est nécessaire de dériver les mesures $K_{\Delta_t^*}$ par rapport à $\widehat{x}_{t|t}$ et $\widehat{P}_{t|t}$ respectivement. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{\Delta_t^*}}{\partial \widehat{x}_{t|t}} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \widehat{x}_{t|t}}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right) \\ &= \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right),\end{aligned}$$

et la dérivée de $K_{\Delta_t^*}$ par rapport à $\widehat{P}_{t|t}$ est calculée de la manière suivante

$$\frac{\partial K_{\Delta_t^*}}{\partial \widehat{P}_{t|t}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial \widehat{P}_{t|t}}\ln\left|\widehat{R}_{t|t}\right| + \frac{\partial}{\partial \widehat{P}_{t|t}} Tr\left(\widehat{P}_{t|t}^{-1} P_{\Delta_t^*;t|t}\right) + \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)' \frac{\partial}{\partial \widehat{P}_{t|t}} \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\right\}.$$

Donc,

$$\frac{\partial K_{\Delta_t^*}}{\partial \widehat{P}_{t|t}} = \frac{1}{2}\widehat{P}_{t|t}^{-1}\left\{\widehat{P}_{t|t} - P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\right\}\widehat{P}_{t|t}^{-1}.$$

Finalement, les dérivées de la mesure de divergence K, entre les deux distributions $f\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$ et $\widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right)$, sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \widehat{x}_{t|t}} = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right), \\ \frac{\partial K}{\partial \widehat{P}_{t|t}} = \frac{1}{2}\sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left\{\widehat{P}_{t|t} - P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\right\}\widehat{P}_{t|t}^{-1}. \end{cases}$$

Pour déterminer le minimum de la fonction K, il suffit de résoudre le système d'équation suivant

$$\begin{cases} \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right) = 0, \\ \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) \widehat{P}_{t|t}^{-1}\left\{\widehat{P}_{t|t} - P_{\Delta_t^*;t|t} - \left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)\left(x_{\Delta_t^*;t|t} - \widehat{x}_{t|t}\right)'\right\}\widehat{P}_{t|t}^{-1} = 0. \end{cases}$$

Par suite, les paramètres de la distribution normale $\widehat{f}\left(x_t \mid \mathcal{F}_t\right) = \mathcal{N}\left(\widehat{x}_{t|t}, \widehat{P}_{t|t}\right)$ qui minimise la mesure K sont donnés par

$$\widehat{x}_{t|t} = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) x_{\Delta_t^*;t|t}, \tag{12}$$

et

$$\begin{aligned}\widehat{P}_{t|t} &= \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) P_{\Delta_t^*;t|t} \\ &\quad + \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t \mid \Delta_t^*, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)\left(\widehat{x}_{t|t} - x_{\Delta_t^*;t|t}\right)'.\end{aligned} \tag{13}$$

4.2 Évaluation de la fonction de vraisemblance

Une fois que les approximations nécessaires pour le déroulement du filtre de Kalman présenté précédemment, sont établies, nous pouvons alors passer à l'évaluation de la fonction de vraisemblance de notre modèle espace d'état périodique et à changement de régimes Markovien. Nous résumons, maintenant, tous les résultats que nous avons obtenus à travers ce chapitre dans un algorithme qui permet de calculer la fonction de vraisemblance du modèle de manière récursive afin d'estimer ses paramètres inconnus.

Algorithm 1 (Aliat et Hamdi)

1. *Initialisation de l'algorithme:*

   (a) *Choisir des valeurs initiales pour les vecteurs* $x_{j;0|0}$ *et* $P_{j;0|0}$, *pour toute trajectoire* $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$ *ainsi que la loi initiale de* Δ_0^*.

   (b) *Construire la matrice des probabilités de transitions* $\mathbb{P}^*$ *à partir de* (4).

2. *Pour* $t = 1, ..., T$,

   (a) *Exécuter le filtre de Kalman* $(5)-(10)$ *pour obtenir :* $x_{j;t|t-1}$, $P_{j;t|t-1}$, $\epsilon_{j;t|t-1}$, $\Omega_{j;t|t-1}$, $x_{j;t|t}$ *et* $P_{j;t|t}$, *pour toute trajectoire* $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$.

   (b) *Calculer pour tout* $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$, *la probabilité* $P\left(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$ *à partir de la relation suivante*

   $$P\left(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{i \in \mathcal{E}^*} P\left(\Delta_t^* = j \mid \Delta_{t-1}^* = i\right) P\left(\Delta_{t-1}^* = i \mid \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

   (c) *Calculer la densité conjointe* $f\left(y_t, \Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$, *pour* $j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}$, *à partir de la relation suivante*

   $$f\left(y_t, \Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = f\left(y_t \mid \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) P\left(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$$

   où

   $$f\left(y_t \mid \Delta_t^* = j, \mathcal{F}_{t-1}\right) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \left|\Omega_{j;t|t-1}\right|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\epsilon'_{j;t|t-1}\Omega^{-1}_{j;t|t-1}\epsilon_{j;t|t-1}\right\}.$$

   (d) *Calculer la densité marginale* $f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)$ *comme suit*

   $$f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right) = \sum_{\Delta_t^* \in \mathcal{E}^*} f\left(y_t, \Delta_t^* \mid \mathcal{F}_{t-1}\right).$$

   Puis calculer les probabilités

   $$P\left(\Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{f\left(y_t, \Delta_t^* = j \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}{f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)}, \text{ pour } j = 1, 2, \ldots, d^{r+1}.$$

   (e) *Calculer les approximations* $\widehat{x}_{t|t}$ *et* $\widehat{P}_{t|t}$ *à partir de* (12) *et* (13) *respectivement.*

3. *Utiliser une procédure d'optimisation pour déterminer* $\widehat{\theta}$ *qui minimise* $-2\mathcal{L}(\theta)$. *La fonction de log-vraisemblance* $\mathcal{L}(\theta)$ *peut être évaluée par la relation*

   $$\mathcal{L}(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \log\left[f\left(y_t \mid \mathcal{F}_{t-1}\right)\right].$$

References

[1] Aliat, B., Hamdi, F., (2018). On markov-switching periodic *ARMA* models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **47**, 344-364.

[2] Chen, C.C., Tsay, W.J., (2011). A Markov regime-switching *ARMA* approach for hedging stock indices. *J. Futures Markets*, **31**, 165-191.

[3] Douc, R., Moulines, E., Stoffer, D. (2014). *Nonlinear time series: Theory, methods and applications with R examples*. CRC Press.

[4] Durbin, J. and Koopman, S. J., (2001). *Time Series Analysis by State Space Methods*. Oxford, New York.

[5] Jones, R. H. (1984). Fitting multivariate models to unequally spaced data. *In Time series analysis of irregularly observed data*, 158-188.

[6] Hamilton, J. D., (1994). *Time series analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

[7] Harvey, A. C.,(1989). *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*. Cambridge University Press, New York.

[8] Harvey, A. C., Todd, P. H. J. (1983). Forecasting economic time series with structural and Box-Jenkins models: A case study. *Journal of Business and Economic Statistics*, **1**, 299-307.

[9] Kim, C. J., Nelson, C. R, (1999). *State-space models with regime-switching*. The MIT press.

[10] Kitagawa, G., Gersch, W. (1984). A smoothness priors state space modeling of time series with trend and seasonality. *Journal of the American Statistical Association*, **79**, 378-389.

[11] Nagy, I., Suzdaleva, E., (2013). Mixture Estimation with State-Space Components and Markov Model of Switching. *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 9970-9984.

[12] Rodriguez, A., Ruiz, E. (2009). Bootstrap prediction intervals in state-space models. *Journal of time series analysis*, **30**, 167-178.

[13] Shumway, R. H., Stoffer, D. S. (1982). An approach to time series smoothing and forecasting using the EM algorithm. *Journal of time series analysis*, **3**, 253-264.

[14] Stoffer, D. S., Wall, K. D. (1991). Bootstrapping state-space models: Gaussian maximum likelihood estimation and the Kalman filter. *Journal of the american statistical association*, **86**, 1024-1033.

[15] Wall, K. D. and Stoffer D. S.,(2002). A state space approach to bootstrapping conditional forecasts in *ARMA* models. Journal of time series Analysis, **23**, 733-751.

[16] West, K., Harrison, J., (1997) . *Bayesian forecasting and dynamic models*. Springer.